考前仿真卷

《高等数学（二）》

专科起点升本科

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 7 分,共 84 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1.极限 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} =$（）

A.1

B.0

C.-1

D.不存在

2.当 $x\to 0$ 时，$3x-2\sin x$ 是 x 的（）

A.等价无穷小

B.同阶无穷小

C.高阶无穷小

D.低阶无穷小

3.设函数 $f(x)=x\sin x-2\sin\frac{\pi}{5}$，则 $f'(x)=$（）

A. $\sin x - x\cos x$

B. $\sin x + x\cos x$

C. $\sin x + x\cos x - 2\cos\frac{\pi}{5}$

D. $-2\cos\frac{\pi}{5}$

4.曲线 $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$ 的水平渐近线方程为（）

A. $x=1$

B. $y=2$

C. $x=0$

D. $y=0$

5.设 $y=xe^x$，则 $dy\big|_{x=0}=$（）

A.0

B. $2dx$

C. dx

D. $-dx$

6.设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	-1	0	1	2
P	a	$2a$	$3a$	$4a$

则 $a=$（）

A.0.1

B.0.2

C.0.3

D.0.4

7. $\int \cos(5x)dx =$ （）

A. $-5\sin(5x)+C$
B. $5\sin(5x)+C$
C. $\dfrac{1}{5}\sin(5x)+C$
D. $-\dfrac{1}{5}\sin(5x)+C$

8. 设函数 $f(x)=x\ln x$, 则 $f'''(1)=$ （）

A. 0
B. -1
C. 2
D. 1

9. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\arctan x+\cos x)dx =$ （）

A. $\dfrac{\pi}{2}+2$
B. 2
C. $\dfrac{\pi}{2}$
D. 0

10. $\int_{1}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx =$ （）

A. 1
B. $\dfrac{1}{2}$
C. $-\dfrac{1}{2}$
D. -1

11. 若 $z=e^{xy}$，则 $dz|_{(1,2)}=$ （）

A. $e^{xy}(ydx+xdy)$

B. $3e^2$

C. $2e^2dx+e^2dy$

D. $2dx+dy$

12. 设 A,B 为独立事件，且 $P(A)=\dfrac{1}{2},P(B)=\dfrac{1}{3}$, 则 $P(A-B)=$ （）

A. $\frac{5}{6}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{3}$

二、填空题(本大题共 3 小题,每小题 7 分,共 21 分)

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=$__________.

14. 曲线 $y=xe^x$ 的拐点是__________.

15. $\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=$__________.

三、解答题(本大题共 3 小题,每小题 15 分,共 45 分.解答应写出推理、演算步骤)

16. 计算定积分 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$.

17. 求函数 $y=2x^2-\ln x$ 的单调区间和极值.

18. 设方程 $xy+xz+yz=0$ 所确定的隐函数是 $z=z(x,y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】B

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

2.【答案】A

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-2\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3-2\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=3-2=1$,所以 $3x-2\sin x$ 是 x 的等价无穷小.

3.【答案】B

【解析】$f'(x)=(x\sin x)'-(2\sin\frac{\pi}{5})'=\sin x+x\cos x$.

4.【答案】D

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, 所以该曲线的水平渐近线为 $y=0$.

5.【答案】C

【解析】因为 $y'=(xe^x)'=(x+1)e^x$, 所以 $dy\Big|_{x=0}=(x+1)e^x\Big|_{x=0}dx=dx$.

6.【答案】A

【解析】由随机变量概率分布的性质可知，$a+2a+3a+4a=10a=1$, 得 $a=0.1$.

7.【答案】C

【解析】$\int\cos(5x)dx=\frac{1}{5}\int\cos(5x)d(5x)=\frac{1}{5}\sin(5x)+C$.

8.【答案】B

【解析】$f'(x)=1+\ln x, f''(x)=\frac{1}{x}, f'''(x)=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'''(1)=-1$.

9.【答案】B

【解析】

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\arctan x+\cos x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\arctan xdx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=0+2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=2\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=2.$$

10.【答案】A

【解析】$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty}=-\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-1\right)=1$.

11.【答案】C

【解析】$dz=ye^{xy}dx+xe^{xy}dy$, 则 $dz|_{(1,2)}=2e^2dx+e^2dy$.

12.【答案】D

【解析】A,B 独立，则 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

二、填空题

13.【答案】e^{-2}

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}\cdot\frac{-2x}{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right]^{\frac{-2x}{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{-2x}{x+1}}=e^{-2}$.

14.【答案】$(-2,-2e^{-2})$.

【解析】$y'=(1+x)e^x, y''=(2+x)e^x$. 令 $y''=0$, 得 $x=-2$, 因为 $x<-2$，$y''<0$；$x>-2$，$y''>0$，又 $x=-2$ 时，$y=-2e^{-2}$, 因此拐点为 $(-2,-2e^{-2})$.

15.【答案】$\sqrt{x^2-1}+C$

【解析】$\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}d(x^2-1)=\frac{1}{2}\int(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}d(x^2-1)=\sqrt{x^2-1}+C.$

三、解答题

16.【答案】$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx\overset{令\sqrt{x}=t}{=}2\int_0^1 te^t dt$

$$\begin{aligned}&=2\int_0^1 td\left(e^t\right)\\&=2(te^t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t dt)\\&=2(e-e^t\Big|_0^1)\\&=2.\end{aligned}$$

【解析】

17.【答案】定义域为$D=\left(0,+\infty\right)$，$y'=4x-\frac{1}{x}=\frac{\left(2x+1\right)\left(2x-1\right)}{x}.$

令$y'=0\Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}$（舍去），$x_2=\frac{1}{2}.$

列表判断：

x	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\downarrow$	极小值$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\ln 2$	$\uparrow$

所以，该函数的单调增区间为$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，单调减区间为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$，极小值为$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\ln 2.$

【解析】

18.【答案】令$F\left(x,y,z\right)=xy+xz+yz$，则$F_x'=y+z,F_y'=x+z,F_z'=x+y$，

则$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{y+z}{x+y},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{x+z}{x+y}.$

【解析】