

考前仿真卷

《高等数学（一）》

专科起点升本科

一、选择题(本大题共 12 小题, 每小题 7 分, 共 84 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = 3$, 则 $m =$ ()

- A. 1
- B. 3
- C. -1
- D. -3

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x$ 是 $\sin^2 x$ 的 ()

- A. 等价无穷小量
- B. 同阶无穷小量
- C. 高阶无穷小量
- D. 低阶无穷小量

3. 设 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ ()

- A. $-4 \sin t$
- B. $4 \sin t$
- C. $-2 \sin t$
- D. $-2 \cos t$

4. 曲线 $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$ 的水平渐近线为 ()

- A. $y = 0$
- B. $y = 1$
- C. $y = 0$ 或 $y = 1$
- D. $x = 0$

5. 设 $y = xe^x$, 则 $dy|_{x=0} =$ ()

- A. 0
- B. $2dx$
- C. $-dx$
- D. dx

6. $\int (1+2x)^3 dx =$ ()

- A. $\frac{1}{4}(1+2x)^4 + C$
- B. $\frac{1}{8}(1+2x)^4 + C$

C. $4(1+2x)^4 + C$

D. $8(1+2x)^4 + C$

7. $\int_{-1}^1 (x^3 + \cos x) dx = (\quad)$

A. $2 \cos 1$

B. $-\sin 1$

C. $\sin 1$

D. $2 \sin 1$

8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = (\quad)$

A. π

B. $-\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{2}$

D. $-\pi$

9. 若 $z = e^{xy}$, 则 $dz|_{(1,2)} = (\quad)$

A. $e^{xy}(ydx + xdy)$

B. $3e^2$

C. $2e^2 dx + e^2 dy$

D. 0

10. 已知 $z = x + y + \sin(xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (\quad)$

A. $\sin(xy)$

B. $\sin(xy)(1 + xy)$

C. $\cos(xy) - xy \sin(xy)$

D. $-xy \cos(xy)$

11. 函数 $f(x) = x^3 - 27x + 2$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 (\quad)

A. 56

B. 2

C. 28

D. 0

12. 通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}$ 的二阶常系数齐次线性微分方程是 ()

A. $y'' - 6y' + 9y = 0$

B. $y'' + 6y' + 9y = 0$

C. $y'' + 6y' + 9y = 1$

D. $y'' + 6y' = 0$

二、填空题 (本大题共 3 小题, 每小题 7 分, 共 21 分)

13. 曲线 $y = \arctan x$ 在 $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ 处的切线斜率是_____.

14. 曲线 $y = 1 + x^3$ 的拐点是_____.

15. $\int \frac{4x+1}{2x^2+x+1} dx =$ _____.

三、解答题 (本大题共 3 小题, 每小题 15 分, 共 45 分. 解答应写出推理、演算步骤)

16. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 3e^{4x}, & x < 0 \\ 2x + \frac{a}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 求 a .

17. 计算二重积分 $\iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} - xy) dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq 1$.

18. 将 $f(x) = \frac{1}{2+x}$ 展成关于 x 的幂级数.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】B

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x} = m = 3$.

2. 【答案】B

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$, 所以 $1 - \cos x$ 为 $\sin^2 x$ 的同阶无穷小量.

3. 【答案】A

【解析】由参数方程求导公式， $\frac{dy}{dx} = \frac{(\cos 2t)'}{(\sin t)'} = \frac{-2 \sin 2t}{\cos t} = \frac{-4 \sin t \cos t}{\cos t} = -4 \sin t$.

4. 【答案】C

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$ ， $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{0}{-1} = 0$. 所以该曲线的水平渐近线为

$y = 0$ 或 $y = 1$.

5. 【答案】D

【解析】因为 $y' = (xe^x)' = (x+1)e^x$ ，所以 $dy|_{x=0} = (x+1)e^x|_{x=0} dx = dx$.

6. 【答案】B

【解析】 $\int (1+2x)^3 dx = \frac{1}{2} \int (1+2x)^3 d(2x+1) = \frac{1}{8} (1+2x)^4 + C$.

7. 【答案】D

【解析】 $\int_{-1}^1 (x^3 + \cos x) dx = \int_{-1}^1 x^3 dx + \int_{-1}^1 \cos x dx = 0 + \sin x|_{-1}^1 = 2 \sin 1$.

8. 【答案】A

【解析】 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

9. 【答案】C

【解析】因为 $dz = (e^{xy})'_x dx + (e^{xy})'_y dy = ye^{xy} dx + xe^{xy} dy$ ，故 $dz|_{(1,2)} = 2e^2 dx + e^2 dy$.

10. 【答案】C

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + y \cos(xy)$ ， $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos(xy) - xy \sin(xy)$.

11. 【答案】B

【解析】令 $f'(x) = 3x^2 - 27 = 0$ ，得 $x = \pm 3$. 又 $f(0) = 2$ ， $f(1) = -24$. 所以该函数在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(0) = 2$.

12. 【答案】B

【解析】由该二阶常系数齐次线性微分方程通解形式可知，其特征根为 $r_1 = r_2 = -3$. 故特征方程为 $(r+3)^2 = r^2 + 6r + 9 = 0$ ，所以该方程为 $y'' + 6y' + 9y = 0$.

二、填空题

13. 【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $k_{\text{切}} = (\arctan x)'|_{x=1} = \frac{1}{1+x^2}|_{x=1} = \frac{1}{2}$.

14. 【答案】 (0,1)

【解析】 $y' = 3x^2, y'' = 6x$. 令 $y'' = 0$, 得 $x = 0$. 因为 $x < 0$ 时, $y'' < 0$; $x > 0$ 时, $y'' > 0$.

又 $x = 0$ 时, $y = 1$. 因此拐点为 (0,1).

15. 【答案】 $\ln(2x^2 + x + 1) + C$

【解析】 $\int \frac{4x+1}{2x^2+x+1} dx = \int \frac{1}{2x^2+x+1} d(2x^2+x+1) = \ln|2x^2+x+1| + C$. 因为

$2x^2+x+1 = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0$, 所以 $\int \frac{4x+1}{2x^2+x+1} dx = \ln(2x^2+x+1) + C$.

三、解答题

16. 【答案】 由题意知, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$.

即 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x + \frac{a}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3e^{4x}$, 得 $\frac{a}{2} = 3$,

所以 $a = 6$.

【解析】

17. 【答案】 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 关于 y 轴对称,

函数 xy 关于 x 为奇函数, 则 $\iint_D xy dx dy = 0$.

$$\begin{aligned} \text{所以 } \iint_D (\sqrt{x^2+y^2} - xy) dx dy &= \iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy \\ &= \iint_D r^2 dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 dr \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

【解析】

18. 【答案】 因为 $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1, 1)$.

$$\text{所以 } f(x) = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} x^n, x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

【解析】